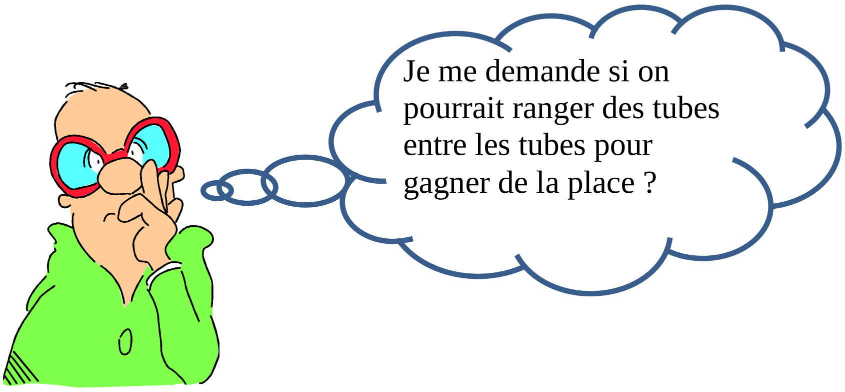
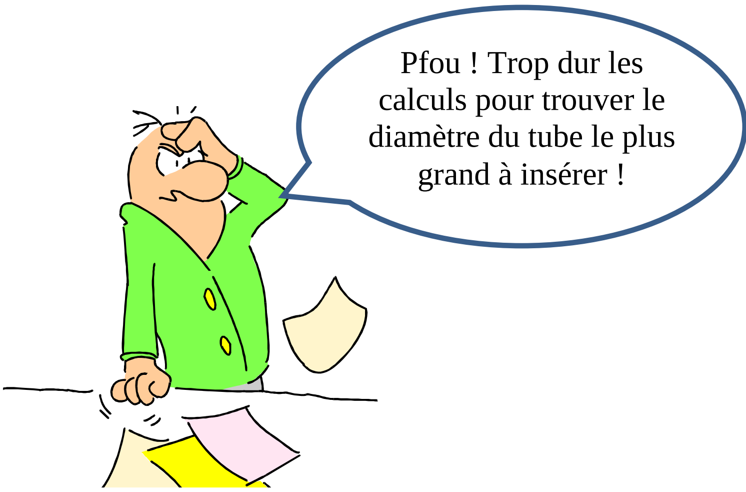
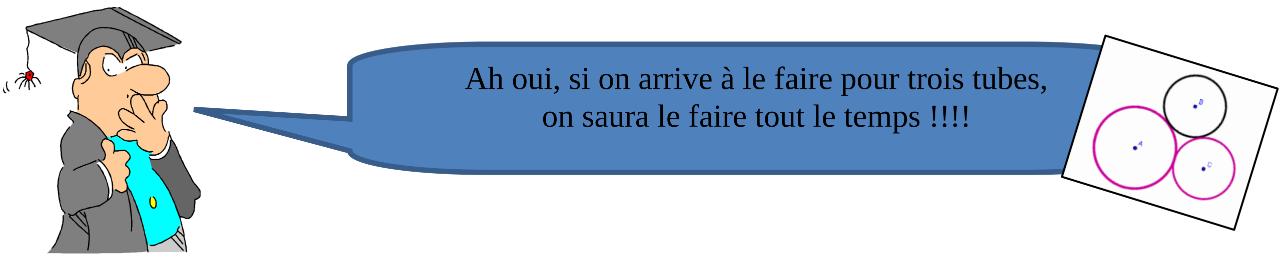
## *1 - Problématique*

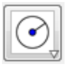




## *2 – Exemple avec GeoGebra*




- Ouvrir le logiciel GeoGebra
- Placer deux points A(3;0) et B(8;0)
- A l'aide de l'outil *Cercle(Centre-Rayon)*  tracer deux cercles de centre A et B et de rayon 2 (couleur Rouge et Taille 4)
- Déterminer la méthode pour trouver le centre C du cercle de rayon 3 et qui soit tangent aux deux précédents.

• Tracer ce cercle de centre C et de rayon 2.5.

• Pour trouver le rayon du cercle tangent *intérieur* aux trois précédents, il faut résoudre l'équation du second degré :

$$-0{,}2394\,x^2 - 1{,}233\,x + 0{,}5 = 0$$

*Calcul du discriminant : $\Delta$ :*

*Calcul des deux racines $x_1$ et $x_2$ :*

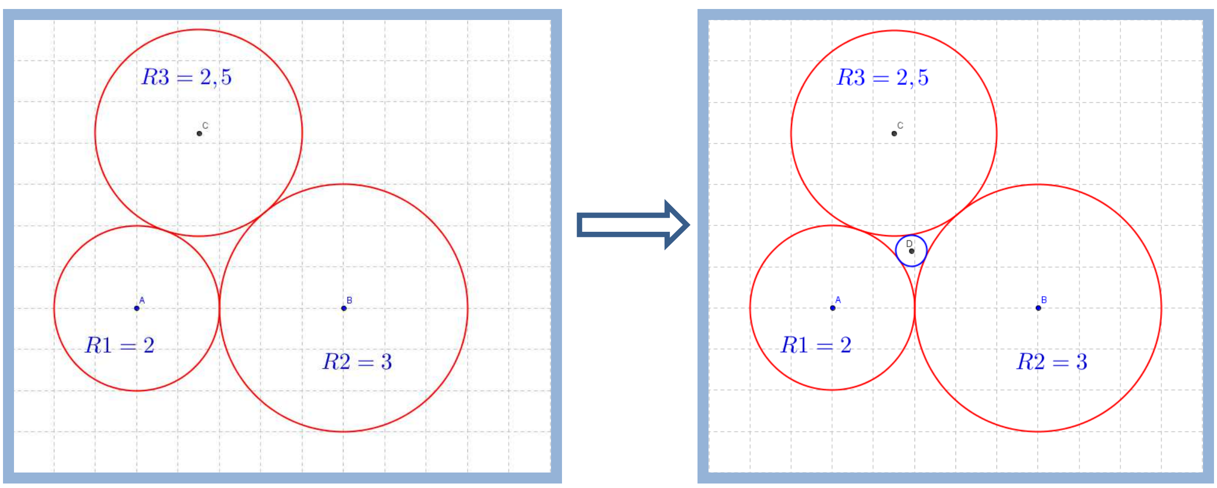
$x_1 =$

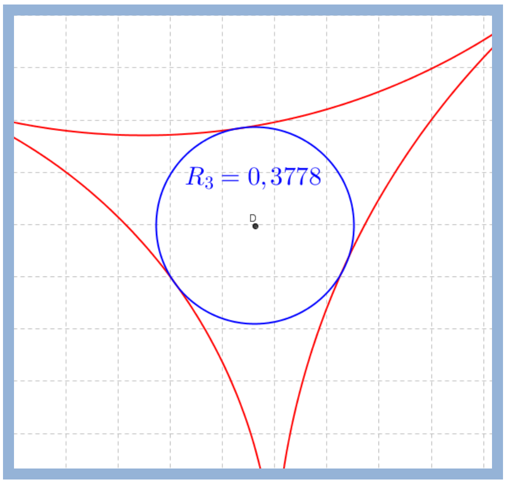
$x_2 =$

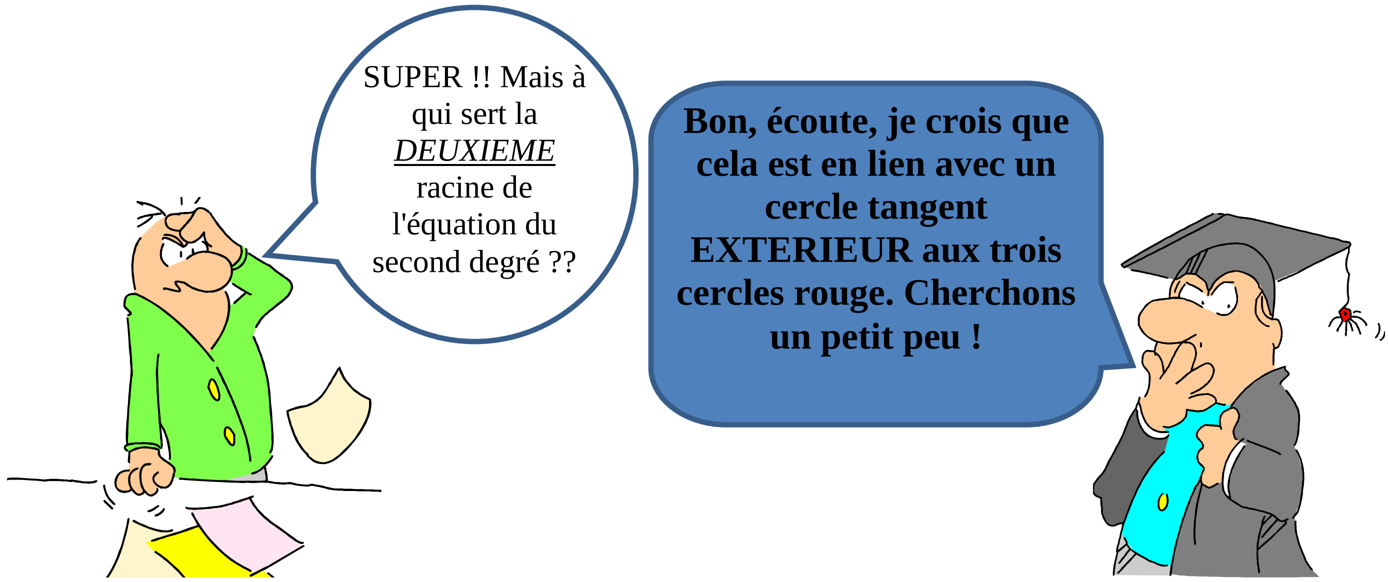
*Remarque : la racine positive de l'équation est le rayon $R_i$ du cercle intérieur tangent aux trois précédents, donc*

$R_i$ = ……… = …………

• Tracer ce cercle comme précédemment (couleur Bleu et Taille 4) et vérifier qu'il est bien tangent aux trois cercles rouge en zoomant dans la fenêtre de GeoGebra.

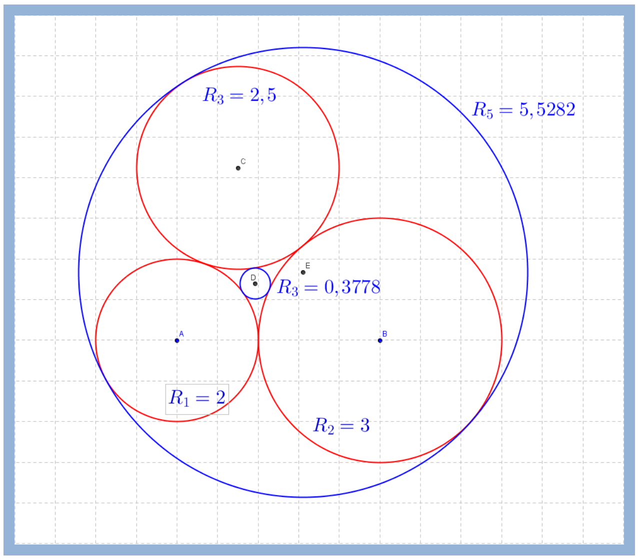



*Aide :* • *la deuxième racine est négative mais le signe – montre seulement que le cercle que l'on cherche est CONTIENT les autres !!*

• *Pour trouver le centre de cercle, il faut faire une soustraction*


## <u>*3 – Cas Général*</u>

***René DESCARTES*** 1596 - 1650 à Stockholm,
Le cas général a été étudié par célèbre philosophe et mathématicien français.

***<u>Le problème</u>***

***Soient trois cercles tangents entre eux, quel peut-être le rayon d'un quatrième cercle tangent à ceux-ci ?***

• DESCARTES préfère utiliser la notion de ***courbure k*** plutôt que celle de ***rayon R*** et la relation entre les deux est assez simple, en effet $k = \dfrac{1}{R}$

Il montre alors que l'on peut écrire le ***<u>Théorème de DESCARTES</u>*** :

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2 \times (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

$k_1$, $k_2$, $k_3$, sont les courbures des trois cercles rouges et $k_4$ qui peut prendre deux valeurs est la courbure des cercles bleus. Il est plus utile d'utiliser la relation donnant directement $k_4$.

Ainsi on montre que :

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}$$

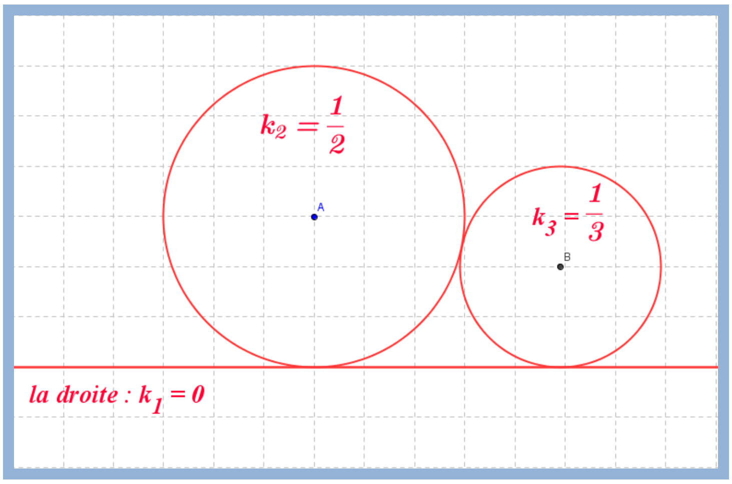
***$k_4$ peut prendre deux valeurs grâce à ce ±***

## *4 – Exercices*

**N°1 :** Soit trois cercles tangents de rayons $R_1 = 1$, $R_2 = 3$ et $R_3 = 4$.

① Calculer $k_1$, $k_2$, $k_3$ avec $10^{-4}$ de précision
② Construire sous GeoGebra ces trois cercles tangents (Couleur rouge et Taille 4)
③ Calculer les deux valeurs de $k_4$ grâce à la relation précédente.
④ Construire alors les deux cercles tangents (Couleur bleue et Taille 4)
----------
⑤ Eventuellement sauvegarder votre construction

**N°2 :** Si un des trois premiers cercles, le premier par exemple, à une courbure $k_1 = 0$ alors son rayon $R$ est infini et il faut comprendre que sa représentation devient une droite. On obtient alors la construction ci-dessous, avec $R_2 = 5$ ($k_2 = 1/5 = 0{,}2$) et $R_3 = 3$ ($k_3 = 1/3 = 0{,}333..$)



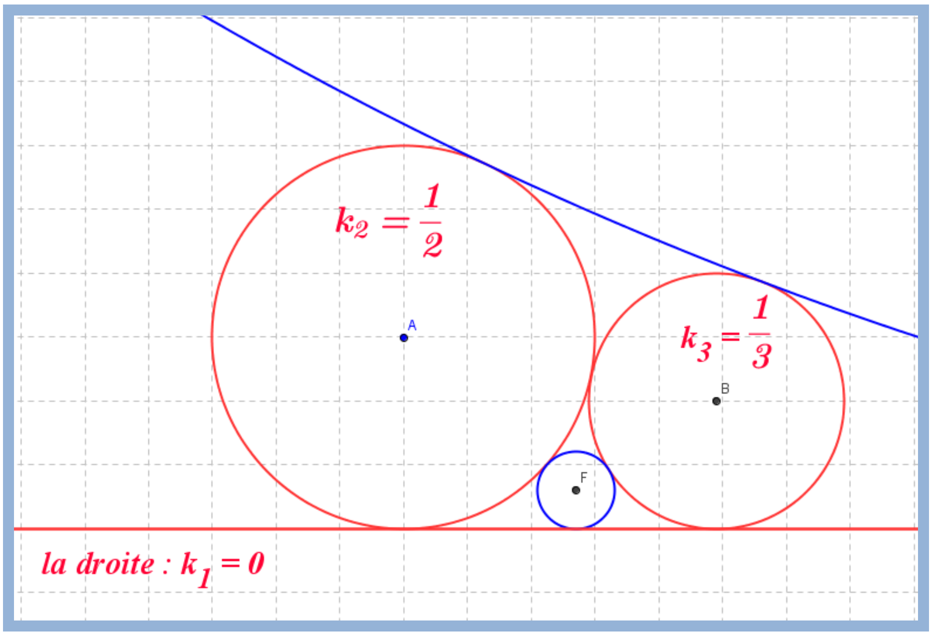

① Construire sous GeoGebra la figure précédente

② Calculer $k_4$ à l'aide de la relation de DESCARTES.

③ Construire le petit cercle bleu tangent aux deux cercles rouge et la droite

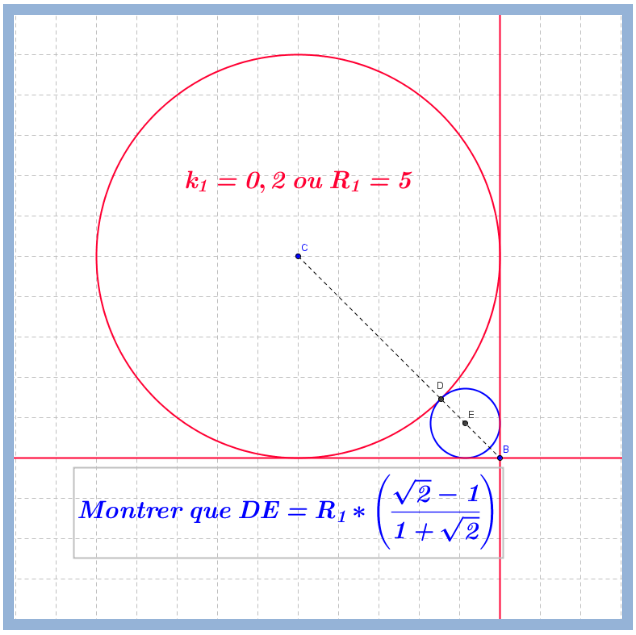
④ Construire le cercle bleu extérieur qui ne pourra être tangent qu'aux deux cercles rouge mais pas à la droite !!!

Vous devez obtenir une construction identique à la figure ci-dessous.



**N°2 :** *Plus dur !*

Ici le théorème de DESCARTES n'est pas très utile, c'est plutôt un problème de carrés, de diagonales, et de racine carré de deux ($\sqrt{2}$).




① Construire les deux droites perpendiculaires et le cercle de rayon $R_1 = 5$

② Calculer DE

③ Construire le point E (pas facile du tout !)

④ Construire le petit cercle tangent

⑤ Construire un cercle tangent aux deux cercles ci-dessus et à la droite verticale (question identique au problème précédent). Vous devez obtenir la figure suivante.