S2 - OLYMPIADES BESANÇON 2004

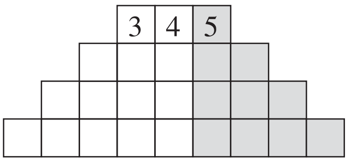
TI-82 STATS – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : fonctions, table de valeurs, suites, suites récurrentes.

1. Objectifs

Utiliser la calculatrice pour conjecturer et résoudre un problème ouvert.

2. Énoncé



On se propose de continuer à remplir le tableau ci dessus avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

• règle 1 : chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs ;

• règle 2 : sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

1) Montrer qu'il n'y a pas d'autre façon de remplir la première ligne.

2) Remplir les deux lignes suivantes.

3) Montrer que si l'on continue à remplir le tableau, en rajoutant autant de lignes que nécessaire, l'une des cases contiendra le nombre 2004.
Préciser la couleur et la position exacte de cette case.

Remarque : La première ligne a été remplie grâce à l'égalité bien connue : $3^2 + 4^2 = 5^2$.

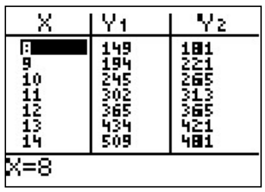
3. Résolution et commentaires

1) Choisissons x comme valeur de la case du milieu ; nous obtenons l'équation $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ qui se réduit à $x^2 - 4x = 0$. Donc x vaut 0 ou 4.
Comme les lignes sont remplies avec des entiers naturels, il y a une seule solution : $x = 4$.

2) Pour remplir les deux lignes suivantes, on choisit toujours x comme terme du milieu.
Plutôt que de résoudre des équations du second degré, on utilise les deux fonctions :

$$Y_1 = (X-2)^2 + (X-1)^2 + X^2 \quad \text{et} \quad Y_2 = (X+1)^2 + (X+2)^2$$

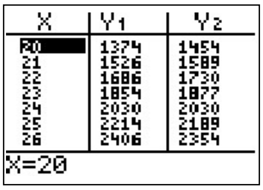
qu'on écrit dans l'éditeur de fonctions : **Y=**.



écran 1

On règle la table (**2nd [TABLSET]**) avec un début à 2 et un pas de 1.
On fait défiler la table de valeurs (**2nd [TABLE]**) jusqu'à trouver X tel que $Y_1(X) = Y_2(X)$.
On obtient ainsi $X = 12$ (*écran* 1).
La deuxième ligne sera donc remplie avec les nombres : 10, 11, 12, 13, 14.
On peut continuer ainsi pour remplir le tableau en ajoutant un terme supplémentaire à Y_1 et Y_2 à chaque fois.

Une autre façon, plus simple, utilise une possibilité de la calculatrice : travailler sur les listes de nombres.
Pour la ligne N, on définit Y_1 comme somme des carrés des nombres variant de $X - N$ à X et Y_2 comme somme des carrés des nombres variant de $X + 1$ à $X + N$.



écran 2

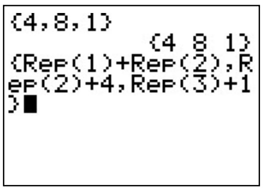
On écrit :
Y1 = somme(suite(A²,A,X–N,X)) et Y2 = somme(suite(A²,A,X+1,X+N)).

Pour trouver la ligne 3, on commence par mettre 3 dans N : $3 \rightarrow$ N puis on fait défiler la table.
On lit : $Y_1(X) = Y_2(X)$ pour $X = 24$ (*écran* 2).
La troisième ligne sera donc : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Remarque :
si les menus sont en anglais, **somme(suite(** est remplacé par **sum(seq(**.

3) En remplaçant N par 4, 5 , 6, … on peut remplir les lignes suivantes et espérer au bout d'un certain temps atteindre le nombre 2004 ! Mais examinons plutôt la colonne des termes du milieu.
Nous obtenons la suite $(U_n) = \{4, 12, 24, 40, 60, 84, \dots\}$.
Remarquons que la différence entre deux termes consécutifs (8, 12, 16, 20, 24, …) semble définir une suite arithmétique (V_n) de premier terme 8 et de raison 4.

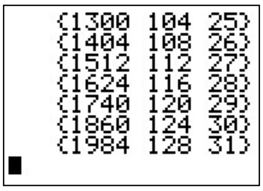
Exploitons cette conjecture dans le but de trouver un éventuel terme de (U_n) proche de 2004 qui nous permette de remplir une ligne du tableau où apparaît le nombre 2004.
Pour cela on utilise la commande **2nd [ANS]** qui est très pratique pour étudier les suites récurrentes et on mettra en parallèle, dans la même liste, trois suites : (U_n), (V_n) et un compteur.



écran 3

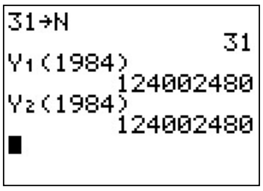
On entre les éléments initiaux {4, 8, 1} et on appuie sur **ENTER** (*écran* 3).
On entre les formules de récurrence en utilisant la commande **2nd [ANS]** (*écran* 3).

Remarque : Si les menus sont en anglais, en appuyant sur **2nd [ANS]**, on obtient **Ans**.



écran 4

On appuie sur **ENTER** un certain nombre de fois dans l'espoir de voir afficher un nombre proche de 2004.
Donc d'après la calculatrice, sur la base de notre conjecture, 1984 apparaîtrait au milieu de la ligne 31 (*écran* 4).



écran 5

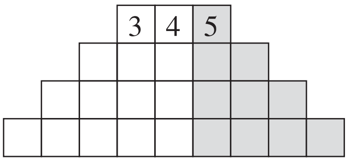
Vérifions, à l'aide des fonctions Y_1 et Y_2 que 1984 convient bien (*écran* 5).
Nous pouvons donc conclure que 2004 apparaît dans la ligne 31, dans la partie grisée à la place 20 à partir de la gauche.

Remarque : On aurait pu choisir, comme inconnue X, le premier terme de chaque ligne et on serait arrivé aussi facilement au résultat.

S2 - OLYMPIADES BESANÇON 2004

TI-82 STATS – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Utiliser la calculatrice pour conjecturer et résoudre les deux dernières questions de l’exercice des Olympiades de Première ci-dessous :



On se propose de continuer à remplir le tableau ci-dessus avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

• Règle 1 : Chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs.

• Règle 2 : Sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

1) Montrer qu’il n’y a pas d’autre façon de remplir la première ligne.

2) Remplir les deux lignes suivantes.

3) Montrer que si l’on continue à remplir le tableau, en rajoutant autant de lignes que nécessaire, l’une des cases contiendra le nombre 2004.

Préciser la couleur et la position exacte de cette case.

Remarque : La première ligne a été remplie grâce à l’égalité bien connue: $3^2 + 4^2 = 5^2$.