F6 - LE PROBLÈME DE L'ÉLASTIQUE

TI-82 STATS – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : fonction, sens de variations, représentation graphique, minimum d'une fonction.

1. Objectifs

Introduire les notions de fonction numérique, de représentation graphique, de sens de variation, de minimum, à travers l'étude d'un exercice concret.

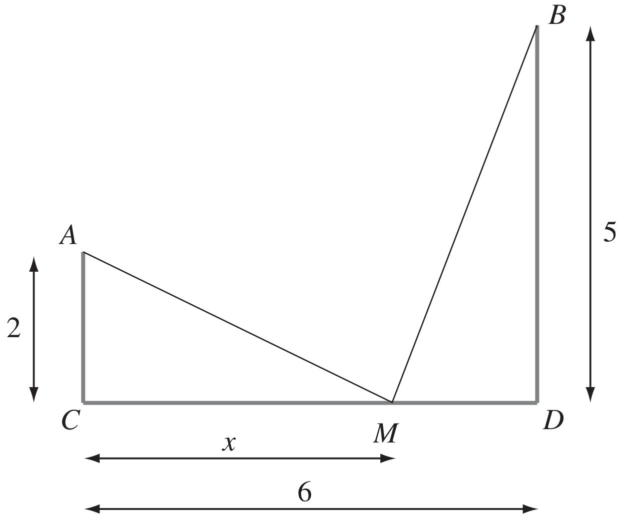
Travailler la notion de valeur approchée et de valeur exacte. Percevoir les potentialités et les limites de la calculatrice.

2. Énonce

Un élastique fixé en A et B est passé dans un anneau (matérialisé par le point M) qui coulisse entre C et D. L'unité est le centimètre.

Le but de cet activité est d'étudier les variations de la longueur de cet élastique suivant la position de M sur $[CD]$.

Voir la *fiche élève* pour les questions.



3. Mise en place et commentaires

• La *fiche élève* est distribuée, l'élève commence par réaliser la figure sur son cahier et effectue plusieurs mesures afin de comprendre que L varie suivant la position de M.

On trouve en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles ACM et MDB :

$$L = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{(6 - x^2) + 25}.$$

• On pourra pour répondre à la question **3) d)** régler le mode d'affichage des nombres après avoir appuyé sur la touche **MODE** (*écran* 1).

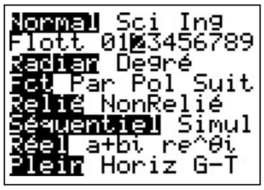
Il faudra, pour traiter la question **6)**, revenir ensuite au mode Flott initial.

• La question **6)** nécessite un nouveau réglage de la table et un déplacement dans cette table à l'aide des touches de déplacement du curseur (*écrans* 2 et 3).

Afin d'atteindre la précision souhaitée dans l'encadrement de x_0, il est nécessaire de placer le curseur dans la colonne Y1 ; on notera l'affichage amélioré en bas de l'écran (*écran* 6).

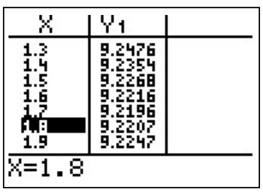
On en déduit :

$$1{,}70 < x_0 < 1{,}72 \text{ et } L_0 \approx 9{,}22.$$

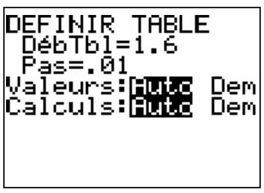


écran 1

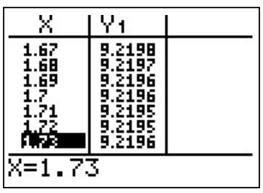
écran 2



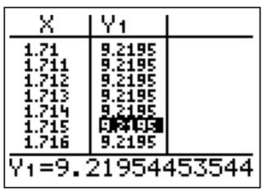
écran 3



écran 4



écran 5



écran 6

• On trouve pour la question **7) c)**, que la position de M qui correspond à la longueur L la plus petite est située à l'intersection I de $(A'B)$ et (CD). En effet, cette longueur correspond au plus court chemin qui relie les points A' et B.

En utilisant les triangles $A'CI$ et IBD, on aboutit à $CI = x_0 = \dfrac{12}{7}$.

On trouve pour L_0 suivant la méthode utilisée : $L_0 = \dfrac{\sqrt{340} + \sqrt{2\,125}}{7}$ ou $L_0 = \sqrt{85}$.

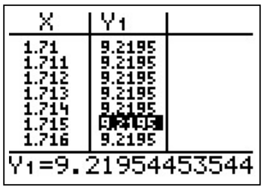
Il pourra être intéressant de demander aux élèves de prouver l'équivalence des deux réponses.

• Le tableau de variations est (question **8)**) :

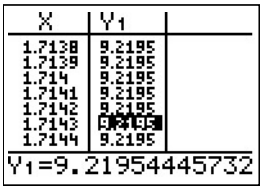
x	0	$\dfrac{12}{7}$	6
L	$2+\sqrt{61}$ ↘	$\sqrt{85}$	↗ $2\sqrt{10}+5$

• L'utilisation de la table dans la question **9)** ne permet pas de prolonger très loin la recherche des décimales de x_0 comme le montrent les *écrans* 7 à 10.
On aboutit par ce procédé à l'encadrement :

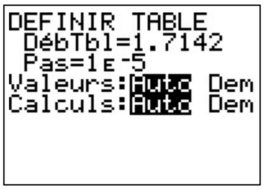
$$1{,}71427 < x_0 < 1{,}71430.$$



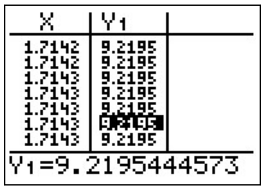
écran 7



écran 8



écran 9



écran 10

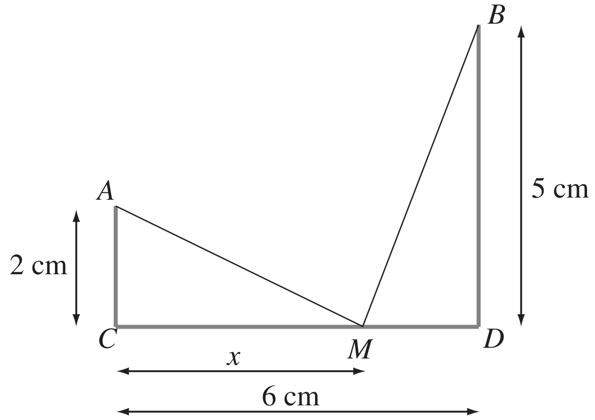
Par contre la période "714285" de 6 chiffres du rationnel $\dfrac{12}{7}$ permet de comptabiliser les « paquets » de 6 chiffres.
Pour la recherche de la 100e décimale, il y a donc 16 périodes complètes, la 96e décimale est donc un 5 et la 100e est un 2.
Le même raisonnement pour la recherche de la 512e décimale conduit à 85 périodes entières, la 510e décimale est donc un 5 et la 512e est un 1.

Nom .... Classe ....

F6 - LE PROBLÈME DE L'ÉLASTIQUE

TI-82 STATS – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Un élastique fixé en A et B est passé dans un anneau (matérialisé par le point M) qui coulisse entre C et D.
Le but de cet activité est d'étudier les variations de la longueur de cet élastique suivant la position de M sur $[CD]$.



1) Refaire la figure ci-dessus à l'échelle 1 sur le cahier.
Mesurer sur cette figure la longueur de l'élastique lorsque x vaut 0, 1, 2 puis 3.
Compléter alors le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3
$L = AM + MB$				

2) Exprimer la longueur $L = AM + MB$ en fonction de x (on pourra valider sa réponse à l'aide de la calculatrice et des résultats mesurés dans la première question).

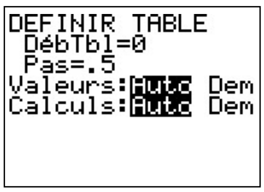
$L =$

3) On souhaite réaliser un graphique qui rende compte des variations de L lorsque le point M décrit le segment $[BC]$.

a) Dans quel ensemble x prend-il ses valeurs ?

b) Dans votre calculatrice, placer dans Y1 (touche **Y=**) l'expression de L trouvée en fonction de x à la question **2**).

c) Préparation de la table de valeurs : appuyer sur **2nd [TblSet]**, régler les paramètres comme l'écran ci-contre, puis appuyer sur **2nd [TABLE]**.



d) Remplir le tableau ci-dessous (on donnera des valeurs approchées de L à 10^{-2} près).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
L													

4) En utilisant une feuille de papier millimétré et en prenant pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées, placer avec précision tous les points de coordonnées (x ; L) du tableau ci-dessus puis terminer avec soin le graphique. Si cela semble nécessaire pour améliorer le tracé, on calculera les coordonnées d'autres points à l'aide de la calculatrice.

5) Utiliser votre graphique pour répondre aux questions suivantes :
Quelle est la longueur de l'élastique pour $x = 4{,}75$; $x = 0{,}8$; $x = 2{,}8$?
Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles on a : $L = 9{,}5$; $L = 9$; $L = 10$?

6) Recherche de la valeur x_0 de x pour laquelle la longueur est minimale.
En utilisant la calculatrice et l'option **2nd [TABLE]**, déterminer un encadrement d'amplitude $2 \cdot 10^{-2}$ de x_0, puis une valeur approchée à 10^{-2} près de la longueur minimale L_0 correspondante.

$$\ldots < x_0 < \ldots$$
$$L_0 \approx \ldots$$

7) Recherche des valeurs exactes de x_0 et de L_0.

a) Compléter la figure de la question **1)** de la manière suivante :

placer A' symétrique de A par rapport à (BC).

b) Démontrer que $A'M + BM = AM + BM$.

c) Pour quelle position de M sur $[BC]$ obtient-on la longueur L la plus petite ? On appellera I cette position particulière.

d) Calculer la valeur exacte de CI, puis la valeur exacte de $L_0 = AI + IB$.
On pourra, pour le calcul de la valeur exacte de L_0 procéder de deux manières, en remplaçant x par x_0 dans l'expression de L ou bien en utilisant le triangle rectangle $A'BB'$, où B' désigne le projeté orthogonal de A' sur (BD).

8) Résumer les résultats trouvés en complétant le tableau des variations de L suivant les valeurs de x ; on reportera les valeurs exactes.

x	0		…		6
L	…	$\searrow$	…	$\nearrow$	…

9) L'étude faite à la question **6)** a permis de déterminer un encadrement d'amplitude $2 \cdot 10^{-2}$ de x_0 ; quelle est la précision maximale que permet d'atteindre la calculatrice par ce procédé ?
En utilisant le résultat exact trouvé pour x_0, donner la 100e, puis la 512e décimale de x_0.