Calcul de la longueur d'une courbe, avec geogebra et maxima

Formule générale

La longueur l d'une courbe d'équation $y = f(x)$ limitée aux valeurs de x comprises entre a et b ($a < b$) est donnée par l'intégrale[1] $\boxed{l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}$.

On souhaite, par exemple, connaître la longueur de la courbe d'équation $y = 0{,}1\,x^2 - 0{,}7x + 3{,}6$ limitée aux valeurs de x comprises entre 6 et 13.
Si ce calcul ne peut pas être mené symboliquement au niveau du bac pro, on peut par contre en obtenir une valeur numérique en utilisant geogebra ou maxima.

Traitement avec geogebra

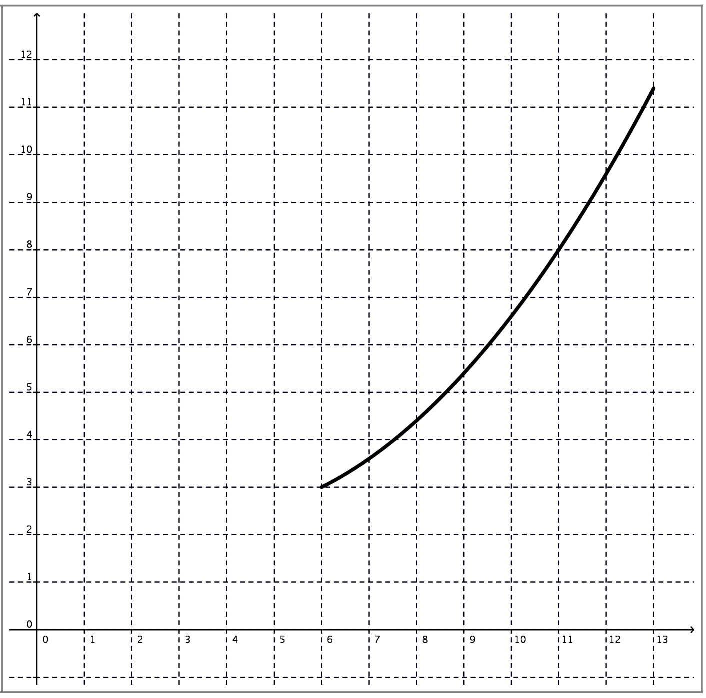
Représentation et mesure graphique

La représentation graphique ci-contre est obtenue avec geogebra en entrant dans la ligne de saisie[2]
`fonction[0.1*x^2-0.7*x+3.6,6,13]`

On peut opérer une mesure approximative de la courbe en faisant glisser une règle ou en utilisant une ficelle. On trouve une longueur d'environ 11 cm si OI = OJ = 1 cm.

Le calcul de cette longueur va être opéré en trois étapes :

1. Calcul de $f'(x)$: $f'(x) = 0{,}2\,x^2 - 0{,}7$
2. Calcul de $1 + (f'(x))^2$:
   $1 + (f'(x))^2 = 1 + (0{,}2\,x^2 - 0{,}7)^2$
   $= 0{,}04\,x^2 - 0{,}28\,x + 1{,}49$



3. Écriture de l'intégrale : $\boxed{l=\int_6^{13} \sqrt{0{,}04\,x^2-0{,}28\,x+1{,}49}\,dx}$
4. Calcul de cette intégrale : entrer dans la ligne de saisie, la formule
   `intégrale[(0.04*x^2-0.28*x+1.49)^0.5,6,13]`

On obtient dans la fenêtre des objets algébriques un résultat de **11,09**.

Le menu Options > Nombre de décimales > 3 nous donne **11,093**

On remarquera que la fonction racine carrée est obtenue en utilisant la puissance 1/2.

Traitement avec maxima

```
float(integrate(sqrt(1+(derivative(0.1*x^2-0.7*x+3.6,x))^2),x,6,13));
```

donne directement `11.09310637714456`

L'inconvénient de maxima est la lourdeur de sa syntaxe, son avantage est sa puissance qui lui permet de traiter toutes les opérations en une seule ligne.

---

1 Démonstration hors programme du bac pro, qui peut être résumée selon démarche ci-dessous

$$(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2 \quad => \quad \frac{(dl)^2}{(dx)^2}=1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2} \quad => \quad \frac{(dl)}{(dx)}=\sqrt{1+(f'(x))^2} \quad => \quad l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

2 Remarquer le séparateur décimal qui est un point, le déclenchement du signe d'exposant avec une espace, et la défintion de l'intervalle en utilisant des virgules. Ces différences de notations avec les notations françaises proviennent de l'origine autrichienne du logiciel.